Matrizes

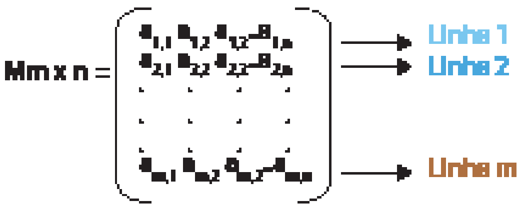
Matrizes são tabelas ou planilhas utilizadas em diversos ramos da ciência como, por exemplo, a engenharia.

Em matemática, uma matriz **m** x **n** (lê-se m por n) consiste em uma tabela de m linhas e n colunas.

Representação Algébrica

A representação das matrizes são dadas por letras maiúsculas no caso do nome da matriz e por letras minúsculas no caso dos elementos. Essas letras minúsculas dos elementos sempre vêm acompanhadas de outras duas letras (i e j) que indicam a linha (i) e a coluna (j) em que o respectivo elemento se encontra.

Assim, uma matriz A do tipo m x n é representada por:



Tipos de Matrizes

- **Matriz linha:** Possui apenas uma linha. O número de colunas é livre.
- **Matriz coluna:** Possui apenas uma coluna. O número de linhas é livre.
- **Matriz nula:** Seus elementos são iguais a zero. O número de linhas e colunas é livre.
- **Matriz quadrada:** O número de colunas é igual ao número de linhas.
- **Matriz diagonal:** È uma matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são sempre iguais zero. Obs.: Os elementos da diagonal principal podem ser iguais a zero ou não.
- **Matriz identidade:** É uma matriz quadrada em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1(um) e os demais elementos são sempre zero.
- **Matriz oposta:** Dada uma matriz A, a matriz oposta a ela é – A, ou seja, invertem-se todos os sinais dos elementos da matriz.
- Matrizes iguais ou igualdade de matrizes: Duas matrizes são consideradas iguais, apenas se todos os elementos correspondentes de ambas as matrizes forem iguais.
- **Matriz Transposta:** Troca-se as linhas pelas colunas e indica-se A^t . Obs.: Dada a matriz $A_{m\,x\,n}$, sua tranposta será $A^{-1}_{n\,x\,m}$.

Operações com Matrizes

Adição de Subtração

A adição ou subtração de matrizes, A e B, existe apenas para matrizes de mesma ordem, adicionando ou subtraindo seus elementos correspondentes em cada matriz.

$$A + B\ (a_{ij} + b_{ij})_{m\,x\,n}\ em\ que\ 1 \le i \le m\ e\ 1 \le j \le n$$

Exemplo: Dada as matrizes A e B determine A+B.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$A + B = \begin{bmatrix} -10+1 & 1+8 & 4+4 & 6-1 \\ 2+0 & 3+6 & 2+3 & 8-3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -9 & 9 & 8 & 5 \\ 2 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de um Número real por uma Matriz

Multiplica-se todos os termos da matriz pelo número dado como resultado, sempre se obterá uma matriz de ordem igual a matriz dada.

Sendo uma matriz A = $(a_{ij})_{mxn}$ e um número real k, chama-se matriz produto, a matriz obtida multiplicando-se todos os elementos da matriz, separadamente, pela constante k.

$$KA = (k \cdot a_{ij})_{m\,x\,n}\ em\ que\ 1 \le i \le m\ e\ 1 \le j \le n$$

Observe como exemplo a determinação da matriz 3ª, a partir de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3.A = 3.\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.1 \\ 3.3 & 3.0 \\ 3.1 & 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 0 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

Todo elemento da matriz C é calculado multiplicando-se os elementos da linha i da matriz A pelos elementos correspondentes da coluna j da matriz B, ordenadamente, e a seguir, somando-se os produtos obtidos.

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + (...) + a_{in} b_{nj}$$

Veja abaixo:

$$A.B = \begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 3} \\ 1 \quad 0 \\ 4 \quad 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} & 1 \\ & 4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} \boxed{2.3 + 3.2} & 2.1 + 3.4 \\ 1.3 + 0.2 & 1.1 + 0.4 \\ 4.3 + 5.2 & 4.1 + 5.4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 3 & 1 \\ 22 & 24 \end{bmatrix} \qquad A_{3\,x2}.B_{2\,x2} = AB_{3\,x2}$$

Para que seja definido o produto entre duas matrizes A e B, o número de colunas da matriz A tem que ser igual ao número de linhas da matriz B. Caso isto não ocorra, não será possível realizar esta operação.

Matriz Inversa

Uma matriz é considerada inversível se ela for quadrada e seu determinante for diferente de zero.

A representação da matriz inversa de **A** é $\mathbf{A^{-1}}$

Para determinarmos a inversa de um matriz A, basta multiplica-la por sua inversa com elementos genéricos, igualando o resultado à matriz identidade de mesma ordem.

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

01. (Fatec 2019 - Adaptada) João, Sílvia e Pedro são funcionários de uma empresa. Considere as matrizes:

A = (10 12 8) e $B = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{pmatrix}$**, em que:**

- **a matriz A representa o valor, em reais, recebido por hora trabalhada de João, Sílvia e Pedro, respectivamente;**
- **a matriz B representa a quantidade de horas trabalhadas por semana dos mesmos funcionários, em cada uma das quatro primeiras semanas no mês de julho de 2018;**
- **na matriz B as linhas 1 a 3 são para João, Sílvia e Pedro, respectivamente; e as colunas de 1 a 4 são, nessa ordem, para as quatro primeiras semanas do mês de julho, de modo que, por exemplo, o elemento b_{13} é a quantidade de horas que João trabalhou na terceira semana desse mês.**

O valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários na segunda semana de julho de 2018 será

a) R$ 670,00
b) R$ 680,00
c) R$ 864,00
d) R$ 980,00
e) R$ 984,00

02. (ESPM) A toda matriz não nula [x y], corresponde um ponto P(x; y) no plano cartesiano, diferente da origem. Ao se multiplicar essa matriz pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$**, o ponto P:**

a) Sofre uma rotação anti-horária de 90º em torno da origem.
b) É projetado ortogonalmente no eixo das abscissas.
c) Sofre uma reflexão em torno do eixo das abscissas.
d) Sofre uma reflexão em torno do eixo das ordenadas.
e) Sofre uma rotação horária de 90º em torno da origem.

03. (Mack) Sejam as matrizes A= (a_{ij}) 4x3, a_{ij} = ji e B = (b_{ij}) 3x4, b_{ij} = ji. Se C= A * B, então c22 vale:

a) 56
b) 258
c) 14
d) 84
e) 3

04. (Ueg 2019) Em um torneio de vôlei, as equipes A, B, C e D obtiveram os resultados registrados na tabela a seguir.

Equipe	Vitórias por 3 x 0	Vitórias por 3 x 2 ou 3 x 1	Derrotas por 3 x 2 ou 3 x 1	Derrotas por 3 x 0
A	7	4	2	0
B	3	5	3	2
C	1	2	6	4
D	0	4	4	5

Sabendo-se que cada resultado, pelo regulamento do torneio, tem a pontuação correspondente segundo a tabela a seguir, a matriz que corresponde à pontuação total no torneio de cada equipe é

Resultado	Número de pontos
Vitórias por 3 x 0	3
Vitórias por 3 x 2 ou 3 x 1	2
Derrotas por 3 x 2 ou 3 x 1	1
Derrotas por 3 x 0	0

a) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

05. (Enem 2019) Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto que as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.

O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na

a) segunda-feira.
b) terça-feira.
c) quarta-feira.
d) quinta-feira.
e) sexta-feira.

06. (G1 - ifce 2019) Considere as matrizes $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **e** $N = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$**. A matriz M.N tem em sua segunda coluna elementos cujo produto vale**

a) 56

b) 28

c) 0

d) 48

e)-8

07. (PUC) Se A, B e C são matrizes quadradas e A^t, B^t e C^t são suas matrizes transpostas, e igualdade falsa entre essas matrizes é:

a) $(A . B)^t = A^t . B^t$

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$

c) $(A – B)C = AC – BC$

d) $(A = B) * C = A * C + B * C$

e) $(A^t)^t = A$

08. (Ueg 2019) A matriz triangular de ordem 3 na qual $a_{ij} = 0$ para $i > j$ e $a_{ij} = 4i – 5j +2$ para $i \leq j$ é representada pela matriz

a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 13 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -9 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 13 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

09. (MACK) Se A é uma matriz 3 x 4 e B uma matriz n x m, então:

a) existem AB e BA se, e somente se, n = 4 e m = 3

b) existe AB se, e somente se, n = 4 e m = 3

c) existem, iguais, A + B e B + A se, e somente se, A = B

d) existe A + B se, e somente se, n = 4 e m = 3

e) existem, iguais, AB e BA se, e somente se, A = B

10. (Ita 2019) Considere as seguintes afirmações a respeito de matrizes A de ordem n x n inversíveis, tais que os seus elementos e os de sua inversa sejam todos números inteiros:

I. $|\det(A)| = 1$

II. $A^T = A^{-1}$

III. $A + A^{-1}$ é uma matriz diagonal.

É(são) sempre VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas III.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) todas.

Gabarito

1) C	2) A	3) A	4) C	5) A
6) B	7) C	8) A	9) B	10) A