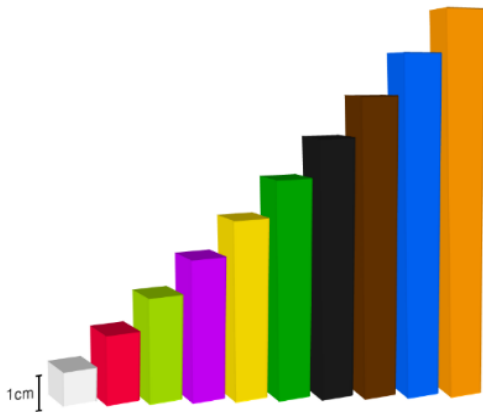


## AULA 12

## Progressão Aritmética (PA)

## Definição



Chamamos de Progressão Aritmética a uma sequência de números reais, quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual à soma do anterior com uma constante  $r$ , denominada razão da P.A.

## Exemplos:

A sequência (1, 4, 7, 10, 13, 16);

A razão desta P.A é representada por  $r = 4 - 1 = 3$ ;

A sequência (1, 6, 11, 16, 21...);

A razão desta P.A é representada por  $r = 6 - 1 = 5$ .

As Progressões Aritméticas podem ser classificadas como:

**crescente ( $r > 0$ ), decrescente ( $r < 0$ ) ou constante ( $r = 0$ ).**

## Exemplos:

(2, 4, 6, 8) → P.A crescente, pois  $r = 2$ ;

(15, 10, 5, 0, -5 ...) → P.A decrescente de razão  $-5$ ;

(3, 3, 3, 3) → P.A constante, pois  $r = 0$ .

## Representação de uma P.A

Sendo  $a_1$  o primeiro termo,  $a_2$  o segundo termo e assim por diante até chegar no último termo  $a_n$  (se existir), faremos as seguintes representações:

(  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$  ).

A representação acima se refere a uma P.A. finita com  $n$  elementos.

Se a sequência for infinita, mudamos um pouco sua representação:

(  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$  ).

Logo temos:

$$a_n + 1 = a_n + r \text{ ou } a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{n-1} - a_n = r$$

## Fórmula do Termo Geral de uma P.A

A fórmula do termo geral de uma P.A (  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$  ) de razão  $r$  é dada por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Na fórmula temos:

$a_n$  = termo geral

$a_1$  = primeiro termo

$n$  = números de termos

$r$  = razão

## Exemplo:

Determine o sétimo termo da P.A ( 5, 7, 9, 11 ... )

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$a_7 = 5 + (7 - 1) \cdot 2$$

$$a_7 = 5 + 6 \cdot 2$$

$$a_7 = 5 + 12$$

$$a_7 = 17$$

Determine o números de termos de uma P.A ( - 3, 1, 5, ..., 121 )

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

$$121 = -3 + (n - 1) \cdot 4$$

$$121 = -3 + 4n - 4$$

$$128 = 4n$$

$$n = 32$$

## Fórmula da Soma de uma P.A

Para calcular a soma do  $n$  termos de uma PA, dispomos da seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Em que:

$a_1$  é o primeiro termo

$a_n$  termo geral ou enésimo termo

$n$  é o número de termos

$S_n$  é a soma dos  $n$  termos

## Exemplo:

Calcule a soma dos 50 primeiros números naturais ímpares.

(1, 3, 5, 7, ...) é a sequência dos números ímpares. Temos  $a_1 = 1$  e  $r = 2$ .

Precisamos determinar o 50º termo dessa sequência ( $a_{50}$ ). Para isso, iremos utilizar a fórmula do termo geral.

$$a_{50} = 1 + (50 - 1) \cdot 2 = 1 + 49 \cdot 2 = 99$$

Agora podemos utilizar a fórmula da soma dos  $n$  primeiros termos da P.A.

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2}$$

$$S_{50} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2}$$

$$S_{50} = \frac{100 \cdot 50}{2}$$

$$S_{50} = 2500$$

## Casos Especiais

## 1º CASO:

Numa PA,  $a_2 + a_6 = 20$  e  $a_4 + a_9 = 35$ . Escrever a PA.

Vamos escrever os dados em função de  $a_1$  e  $r$ :

$$a_2 = a_1 + r; a_6 = a_1 + 5r; a_4 = a_1 + 3r; a_9 = a_1 + 8r$$

Podemos formar o sistema com duas variáveis:

$$\begin{cases} (a_1 + r) + (a_1 + 5r) = 20 \\ (a_1 + 3r) + (a_1 + 8r) = 35 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2a_1 + 6r = 20 \\ 2a_1 + 11r = 35 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 6r = -20 \\ 2a_1 + 11r = 35 \end{cases} \rightarrow 5r = 15 \rightarrow r = 3$$

Com  $r = 3$ , temos:

$$2a_1 + 6 \cdot 3 = 20$$

$$2a_1 = 20 - 18$$

$$2a_1 = 2$$

$$a_1 = 1$$

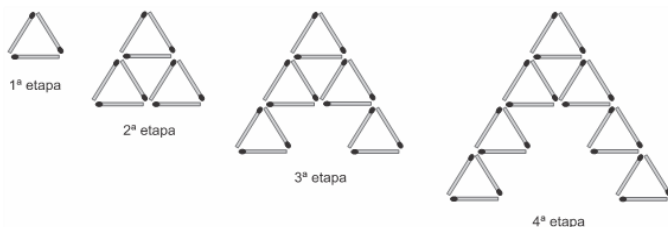
Logo, a PA pedida é  $(1, 4, 7, \dots)$

## 2º CASO:

Soma ou produto de Termos consecutivos  $(x - r, x, x + r)$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (G1 - cotuca 2019) João brinca com palitos de fósforo montando figuras. Na 1ª etapa, monta um triângulo e, nas etapas seguintes, vai acrescentando triângulos conforme a sequência representada abaixo.



O número de palitos de fósforo necessários e suficientes para a construção da 10ª etapa é:

- a) 51
- b) 54
- c) 57
- d) 60
- e) 63

02. (Ufrgs 2019) Desde a Grécia Antiga, sabe-se que a soma dos números ímpares consecutivos, a partir do 1 é sempre um quadrado perfeito. Como exemplo, tem-se

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

Então, a soma de todos os números ímpares menores do que 100 é

- a)  $42^2$
- b)  $49^2$
- c)  $50^2$
- d)  $99^2$
- e)  $100^2$

03. (Espm 2019) Os jogadores A, B e C estão sentados diante de uma mesa redonda e cada um tem 4 cartas nas mãos. As rodadas do jogo se sucedem da seguinte maneira:

Na 1ª rodada, A passa 1 carta para B.

Na 2ª rodada, B passa 2 cartas para C.

Na 3ª rodada, C passa 3 cartas para A.

Na 4ª rodada, A passa 4 cartas para B.

Na 5ª rodada, B passa 5 cartas para C e assim por diante, até que todas as cartas se encontrem nas mãos de A e o jogo termina.

O número de rodadas realizadas nesse jogo foi:

- a) 12
- b) 15
- c) 18
- d) 21
- e) 24

04. (Enem 2019) O slogan “Se beber não dirija”, muito utilizado em campanhas publicitárias no Brasil, chama a atenção para o grave problema da ingestão de bebida alcoólica por motoristas e suas consequências para o trânsito. A gravidade desse problema pode ser percebida observando como o assunto é tratado pelo Código de Trânsito Brasileiro. Em 2013, a quantidade máxima de álcool permitida no sangue do condutor de um veículo, que já era pequena, foi reduzida, e o valor da multa para motoristas alcoolizados foi aumentado. Em consequência dessas mudanças, observou-se queda no número de acidentes registrados em uma suposta rodovia nos anos que se seguiram às mudanças implantadas em 2013, conforme dados no quadro.

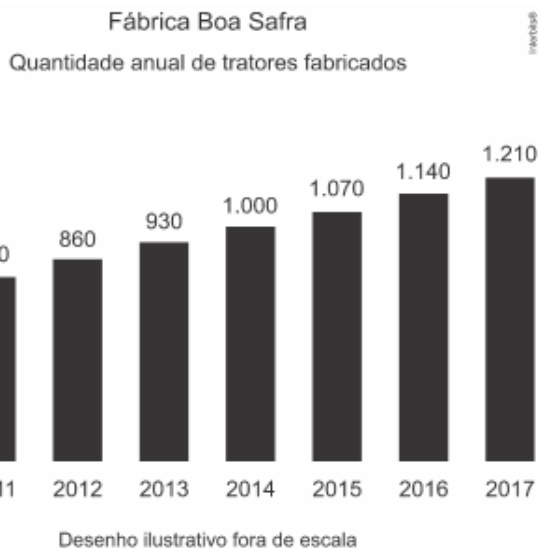
Suponha que a tendência de redução no número de acidentes nessa rodovia para os anos subsequentes seja igual à redução absoluta observada de 2014 para 2015.

Ano	2013	2014	2015
Número total de acidentes	1050	900	850

Com base na situação apresentada, o número de acidentes esperados nessa rodovia em 2018 foi de

- a) 150
- b) 450
- c) 550
- d) 700
- e) 800

05. (Espcex (Aman) 2019) Uma fábrica de tratores agrícolas, que começou a produzir em 2010, estabeleceu como meta produzir 20.000 tratores até o final do ano de 2025. O gráfico abaixo mostra as quantidades de tratores produzidos no período 2010-2017.



O número de filas que foram formadas com todos os estudantes é

- a) 19
- b) 21
- c) 22
- d) 23
- e) 25

10. (Uefs 2018) Uma progressão aritmética (PA) possui 17 termos, todos positivos. A diferença entre o maior termo ( $a_{17}$ ) e o menor termo ( $a_1$ ) dessa PA é igual a 48. Sabendo que, dentre os números primos que ocorrem nessa PA, 13 é o menor e 43 é o maior, o valor de  $a_1 + a_{17}$  é

- a) 59
- b) 62
- c) 65
- d) 68
- e) 71

Admitindo que a quantidade de tratores produzidos evolua nos anos seguintes segundo a mesma razão de crescimento do período 2010-2017, é possível concluir que a meta prevista

- a) deverá ser atingida, sendo superada em 80 tratores.
- b) deverá ser atingida, sendo superada em 150 tratores.
- c) não deverá ser atingida, pois serão produzidos 1.850 tratores a menos.
- d) não deverá ser atingida, pois serão produzidos 150 tratores a menos.
- e) não deverá ser atingida, pois serão produzidos 80 tratores a menos.

06. (Ueg 2019) Uma concessionária vende um carro financiado em dois anos, e as parcelas mensais serão da seguinte maneira: a primeira parcela será de R\$ 1.000,00 e as demais decrescerão R\$ 20,00 ao mês. Ao final do financiamento esse carro terá custado ao comprador

- a) R\$ 18.480,00
- b) R\$ 18.240,00
- c) R\$ 18.000,00
- d) R\$ 17.760,00
- e) R\$ 17.520,00

07. (Pucrj 2018) Sabendo que os números da sequência ( $y$ , 7,  $z$ , 15) estão em progressão aritmética, quanto vale a soma  $y + z$ ?

- a) 20
- b) 14
- c) 7
- d) 3,5
- e) 2

08. (UFCE) Um atleta corre sempre 400 metros a mais que no dia anterior. Ao final de 11 dias ele percorre um total de 35200 metros. O número de metros que ele correu no último dia foi igual a

- a) 5100
- b) 5200
- c) 5300
- d) 5400
- e) 5500

09. (Ufrgs 2018) Em uma escola, as turmas de ensino médio totalizam 231 estudantes. Para uma atividade festiva na escola, todos esses estudantes foram dispostos em filas, obedecendo à seguinte disposição: 1 estudante na primeira fila, 2 estudantes na segunda fila, 3 estudantes na terceira fila, e assim sucessivamente.

Gabarito

- |      |      |      |      |       |
|------|------|------|------|-------|
| 1) C | 2) C | 3) A | 4) D | 5) E  |
| 6) A | 7) B | 8) B | 9) B | 10) D |